c) f est dérivable sur]0 , 1[et $f'(x) = \frac{-\pi \sin(\pi x)}{(1-\cos(\pi x))^2} \neq 0$

$\forall x \in]0,1[$ d'où : f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[) =]\frac{1}{2}, +\infty[$

* soit $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos(\pi y)} = x \Leftrightarrow 1 - \cos(\pi y) = \frac{1}{x}$

et $\cos(\pi y) = 1 - \frac{1}{x}$; $\sin(\pi y) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi y)}$ car $y \in]0, \pi[$

$\Rightarrow \sin(\pi y) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\sqrt{2x-1}$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-(1-\cos(\pi y))^2}{\pi \sin(\pi y)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{\pi}{x}\sqrt{2x-1}}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi x \sqrt{2x-1}}$

EXERCICE№17

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \leq 0 \ \forall x \in [-1, 1]$

f est continue et strictement décroissante sur [-1 , 1] ,

elle réalise donc une bijection de

[-1 , 1] sur $[\frac{2}{3}, 2] = I$

x	-1		1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	↘	$\frac{2}{3}$

2) : $g(x) = f(x) - x$

a) alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \leq 0$

* g est continue sur [-1 , 1], et $g(-1).g(1) = -1 < 0$, d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]-1, 1[$,

comme g est strictement décroissante alors α est unique.

b) $g(\frac{2}{3}).g(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in]\frac{2}{3}, 1[$,

c) $M(x,y) \in (\mathcal{C}_f) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ g(x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = x = \alpha$

$(\mathcal{C}_f) \cap \Delta = \{A(\alpha, \alpha)\}$

3) : f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{2}{3}$ (voir ex 16 , 3) – b)

4) – a) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$; $f(0) = 1$; $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{7}$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn